

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ  
ADOLF HAIMOVICI  
Etapa locală- 21februarie 2016  
Filiera tehnologică: profilul servicii

Clasa XI

1. Știind că  $f(X) = X^2 + 2I_3$  iar  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  să se calculeze  $\det(A)$  și  $f(A)$ .

**Soluție:**  $\det(A)=4$ .....1p

$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ .....3p

$f(A) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 12 \end{pmatrix}$ .....3p

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} - \{-q\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+px+p}{x+q}$  unde  $p$  și  $q \in \mathbb{R}$ .

Găsiți  $p$  și  $q$  pentru care dreapta  $y = x + 1$  este asimptota oblică spre  $+\infty$  a funcției  $f$  iar  $f(0) = 2$ .

**Soluție:** Asimptota oblică are forma  $y = mx+n$ ..... 1p

$m = 1$ ..... 1p

$n = p - q$  ..... 2p

$f(0) = \frac{p}{q}$  ..... 1p

se obțin  $p = 2$  și  $q = 1$ ..... 2p

3. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} - \{-q\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+px+p}{x+q}$  unde  $p$  și  $q \in \mathbb{R}$ .

Găsiți o relație între  $p$  și  $q$  astfel încât  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{f(x)}{x} \right)^x = 1$ .

**Soluție:** Limita este de tipul  $1^\infty$  ..... 1p

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{f(x)}{x} \right)^x = e^{p-q}$ ..... 5p

$p = q$ ..... 1p

4. Codificarea unui mesaj folosind înmulțirea matricelor și pătratul lui Polybe:

	1	2	3	4	5
1	a	b	c	d	e
2	f	g	h	i	j
3	k	l	m	n	o
4	p	q	r	s	t
5	u	v	w	x	y

Exemple: salut=43 11 31 45 44, la masa=31 11 32 11 43 11

Pentru complicarea codificării putem folosi matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  astfel: textul codificat cu pătratul Polybe, îl scriem sub forma unei matrice cu 2 linii și  $n$  coloane, în funcție de câte elemente avem(dacă e nevoie mai adăugăm un 0).

Salut = 43 11 31 45 44 devine matricea  $S = \begin{pmatrix} 43 & 31 & 44 \\ 11 & 45 & 0 \end{pmatrix}$

La masa = 31 11 21 15 31 devine matricea  $L = \begin{pmatrix} 31 & 32 & 43 \\ 11 & 11 & 11 \end{pmatrix}$ .

Înmulțim matricea A cu matricea S și obținem  $AS = \begin{pmatrix} 43 & 31 & 44 \\ 97 & 107 & 88 \end{pmatrix}$ . Destinatarul mesajului va primi textul codificat: 43 97 31 107 44 88 și matricea A. Pentru a-l descifra trebuie să calculeze inversa matricei A, după care să înmulțească  $A^{-1}$  cu matricea cu 2 linii și n coloane pe care o scrie din mesajul primit, adică  $\begin{pmatrix} 43 & 31 & 44 \\ 97 & 107 & 88 \end{pmatrix}$ , iar rezultatul să-l descifreze cu pătratul lui Polybe.

- Calculați inversa matricei A.
- Scrieți folosind pătratul lui Polybe textul: olimpiada
- Codificați folosind matricea A și procedeul descris mai sus textul:olimpiada
- Descifrați mesajul 13 37 31 86 21 66 13 37 44 88.

Soluție:

- Inversa  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ .....1p
- Olimpiada=34 31 24 32 35 24 11 14 11.....1p
- 34 99 24 80 35 99 11 36 11 22.....2p
- Calificat.....3p